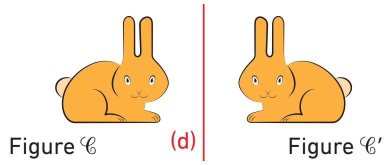
1 Symétrie par rapport à une droite

OBJECTIF 1

DÉFINITION Dire que deux figures sont **symétriques par rapport à une droite** signifie que, en effectuant un pliage le long de la droite, les figures se superposent.

Exemple

- La droite (d) est appelée l'**axe de symétrie**.
- Le **symétrique** de la figure $\mathscr{C}$ par rapport à la droite (d) est la figure $\mathscr{C}'$.
- Les figures $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ sont symétriques par la **symétrie axiale** d'axe la droite (d).



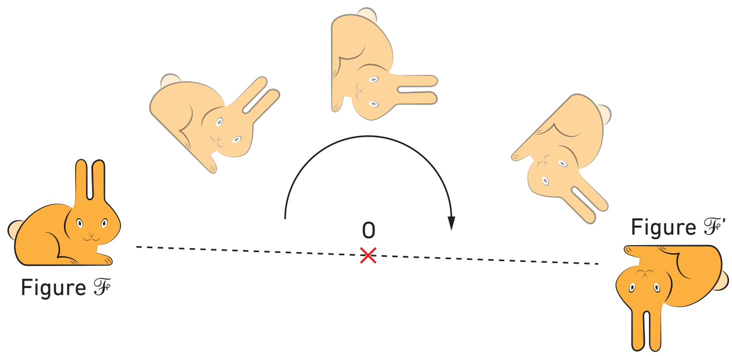
2 Symétrie par rapport à un point

OBJECTIF 2

A Définition

DÉFINITION Dire que deux figures sont **symétriques par rapport à un point** signifie que, en effectuant un demi-tour autour de ce point, les figures se superposent.

Exemple

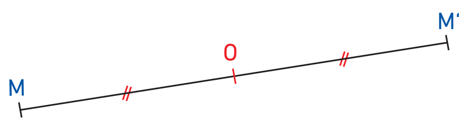


- Le point O est appelé le **centre de symétrie**.
- Le **symétrique** de la figure $\mathscr{F}$ par rapport à O est la figure $\mathscr{F}'$.
- Les figures $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ sont symétriques par la **symétrie centrale** de centre O.

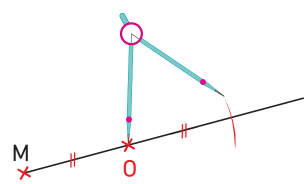
B Figures symétriques

DÉFINITION Dire que deux points M et M' sont symétriques par rapport à un point O signifie que le point O est le milieu du segment [MM'].

Exemple



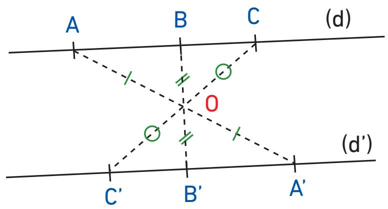
- Pour construire le symétrique d'un point sur papier blanc, on reporte au compas la longueur OM sur la demi-droite [MO).



C Propriétés de la symétrie centrale

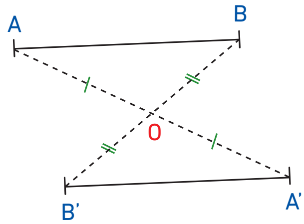
PROPRIÉTÉ **Si** trois points sont alignés, **alors** leurs symétriques par rapport à un point sont aussi alignés.

Exemple



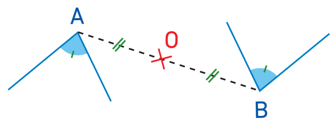
PROPRIÉTÉ **Si** deux segments sont symétriques par rapport à un point, **alors** ils sont parallèles et de même longueur.

Exemple



PROPRIÉTÉ **Si** deux angles sont symétriques par rapport à un point, **alors** ils ont la même mesure.

Exemple



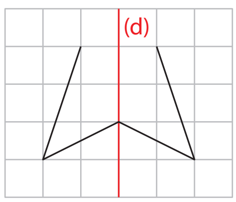
PROPRIÉTÉ **Si** deux figures sont symétriques par rapport à un point, **alors** elles ont le même périmètre et la même aire.

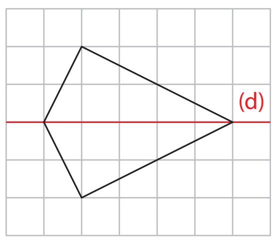
3 Axe de symétrie et centre de symétrie d'une figure

OBJECTIF 3

DÉFINITION Dire qu'une droite est un **axe de symétrie d'une figure** signifie que la figure et son symétrique par rapport à cette droite sont confondus.

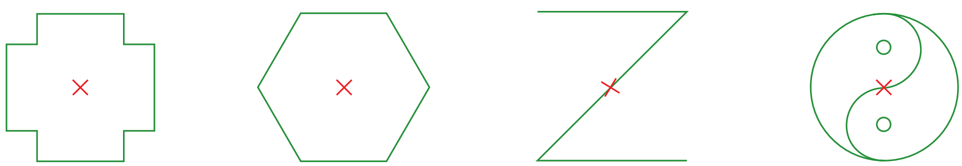
Exemples





DÉFINITION Dire qu'un point est un **centre de symétrie d'une figure** signifie que la figure et son symétrique par rapport à ce point sont confondus.

Exemples



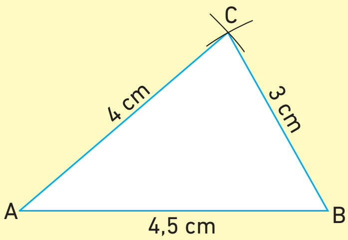
4 Constructions de triangles

OBJECTIF 4

On peut construire un triangle dans les trois cas suivants.

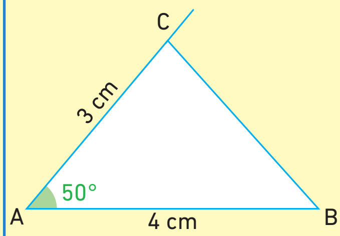
Cas 1. On connait la longueur des trois côtés.

Exemple



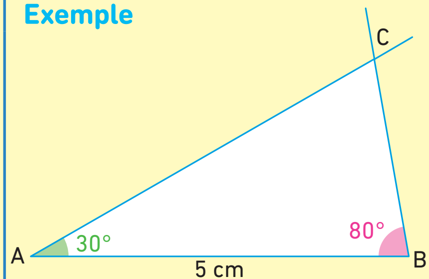
Cas 2. On connait la longueur de deux côtés et la mesure de l'angle délimité par ces côtés.

Exemple



Cas 3. On connait la longueur d'un côté et la mesure des angles adjacents à ce côté.

Exemple



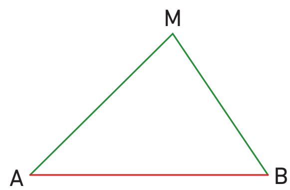
5 Inégalité triangulaire

OBJECTIF 5

A Cas général

Le plus court chemin entre deux points est la ligne droite.
Tout autre chemin passant par un troisième point est plus long ou de même longueur.
En conséquence, on peut énoncer la propriété suivante.

PROPRIÉTÉ **Si** A, B et M sont trois points quelconques, **alors** :
$AB \leqslant AM + MB$.



Dans le triangle ABM, on a également :
$AM \leqslant AB + BM$ et $MB \leqslant MA + AB$.

B Cas d'égalité

PROPRIÉTÉ **Si** un point M appartient à un segment [AB], **alors** $AB = AM + MB$.

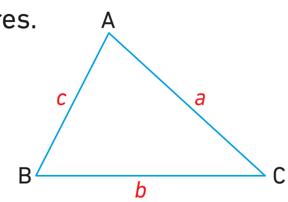
PROPRIÉTÉ **Si** trois points A, B et M sont tels que $AB = AM + MB$, **alors** le point M appartient au segment [AB].

C Application aux triangles

Pour construire un triangle ayant pour côtés trois longueurs données, il faut que chaque longueur soit inférieure à la somme des deux autres.

Exemple

- Dans le triangle ABC ci-contre, on a :
  $a < b + c$
  $b < a + c$
  $c < a + b$

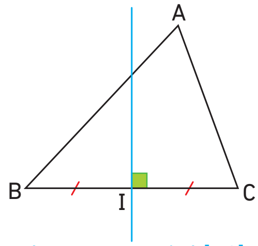


6 Droites remarquables d'un triangle

OBJECTIF 6

DÉFINITION La **médiatrice d'un côté d'un triangle** est la droite perpendiculaire à ce côté et passant par son milieu.

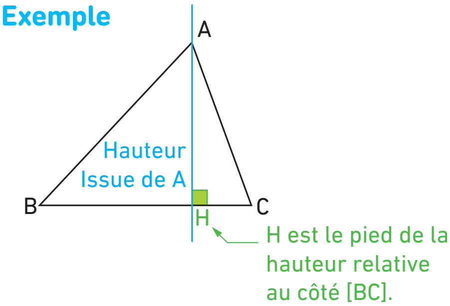
Exemple



Médiatrice du côté [BC]

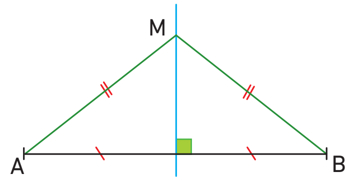
DÉFINITION Une **hauteur d'un triangle** est une droite qui passe par un sommet de ce triangle et qui est perpendiculaire au côté opposé à ce sommet.

Exemple



Rappels de propriétés vues en cycle 3

- **Si** un point se trouve sur la médiatrice d'un segment, **alors** il est équidistant des extrémités de ce segment.
- **Si** un point se trouve à égale distance de deux points, **alors** il appartient à la médiatrice du segment d'extrémités ces deux points.



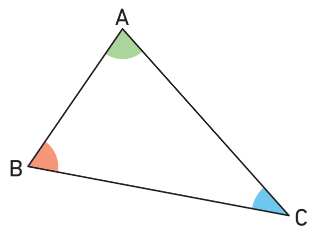
7 Somme des angles d'un triangle

OBJECTIF 7

PROPRIÉTÉ La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°.

Exemple

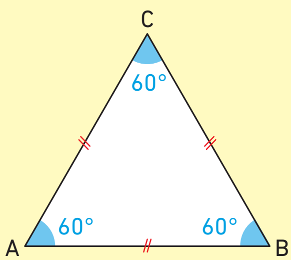
- Dans le triangle ABC, $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180°$.



Rappel et conséquences sur les angles des triangles particuliers

PROPRIÉTÉS – Dans un triangle équilatéral, chacun des angles mesure 60°.

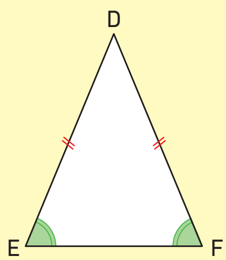
Exemple



$\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 60°$

– Dans un triangle isocèle, les angles à la base ont la même mesure.

Exemple

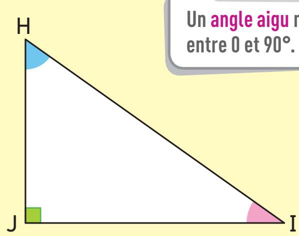


$\widehat{E} = \widehat{F}$

– Dans un triangle rectangle, la somme des deux angles aigus est égale à 90°.

Exemple

Vocabulaire
Un **angle aigu** mesure entre 0 et 90°.



$\widehat{H} + \widehat{I} = 90°$

8 Le parallélogramme

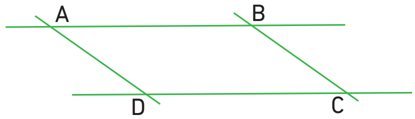
OBJECTIF 8

A Définition du parallélogramme

DÉFINITION Un **parallélogramme** est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles.

Exemple

- Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme, car (AB) // (CD) et (AD) // (BC).

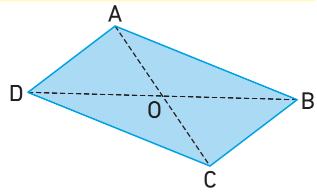


B Propriétés du parallélogramme

PROPRIÉTÉ **Si** un quadrilatère est un **parallélogramme**, **alors** il possède un centre de symétrie : le point d'intersection de ses diagonales.

Exemple

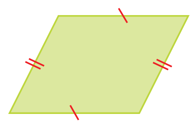
- Soit ABCD un parallélogramme. On note O son centre de symétrie. On dit que ABCD est un parallélogramme de **centre** O.



Les côtés

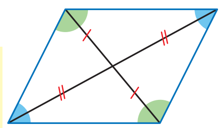
PROPRIÉTÉ **Si** un quadrilatère est un **parallélogramme**, **alors** ses côtés opposés sont parallèles.

PROPRIÉTÉ **Si** un quadrilatère est un **parallélogramme**, **alors** ses côtés opposés ont la même longueur.



Les diagonales et les angles

PROPRIÉTÉ **Si** un quadrilatère est un **parallélogramme**, **alors** ses diagonales se coupent en leur milieu.



PROPRIÉTÉ **Si** un quadrilatère est un **parallélogramme**, **alors** ses angles opposés sont égaux et la somme de deux angles consécutifs est égale à 180°.

C Du quadrilatère au parallélogramme

Avec les côtés

PROPRIÉTÉS

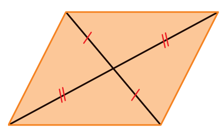
– **Si** un quadrilatère a ses **côtés opposés parallèles, alors** c'est un parallélogramme.

– **Si** un quadrilatère (non croisé) a ses **côtés opposés de même longueur, alors** c'est un parallélogramme.

– **Si** un quadrilatère (non croisé) a **deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors** c'est un parallélogramme.

Avec les diagonales

PROPRIÉTÉ **Si** un quadrilatère a ses **diagonales qui se coupent en leur milieu, alors** c'est un parallélogramme.



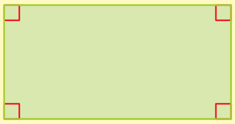
9 Parallélogrammes particuliers

OBJECTIF 9

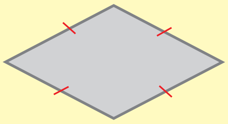
A Rappels de la classe de 6^e

DÉFINITIONS

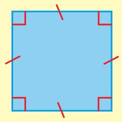
– Un **rectangle** est un quadrilatère qui a quatre angles droits.



– Un **losange** est un quadrilatère qui a quatre côtés de la même longueur.



– Un **carré** est un quadrilatère qui a quatre angles droits et quatre côtés de la même longueur.



PROPRIÉTÉS

– **Si** un quadrilatère est un **rectangle**, **alors** ses diagonales sont de même longueur.

– **Si** un quadrilatère est un **losange**, **alors** ses diagonales sont perpendiculaires.

– **Si** un quadrilatère est un **carré**, **alors** ses diagonales sont perpendiculaires et de même longueur.

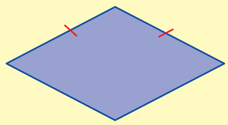
Le rectangle, le losange et le carré sont des parallélogrammes particuliers. En effet, ces quadrilatères ont des côtés opposés parallèles.

B Du parallélogramme aux parallélogrammes particuliers

• Avec les côtés

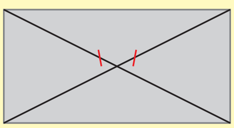
DÉFINITION **Si** un parallélogramme possède **deux côtés consécutifs perpendiculaires**, **alors** c'est un **rectangle**.

DÉFINITION **Si** un parallélogramme possède **deux côtés consécutifs de même longueur**, **alors** c'est un **losange**.

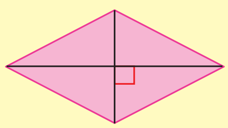


• Avec les diagonales

DÉFINITION **Si** un parallélogramme possède des **diagonales de même longueur**, **alors** c'est un **rectangle**.



DÉFINITION **Si** un parallélogramme possède des **diagonales perpendiculaires**, **alors** c'est un **losange**.



• Le cas du carré

PROPRIÉTÉ **Si** un quadrilatère est à la fois **un rectangle et un losange**, **alors** c'est un **carré**.

10 Périmètre d'une figure

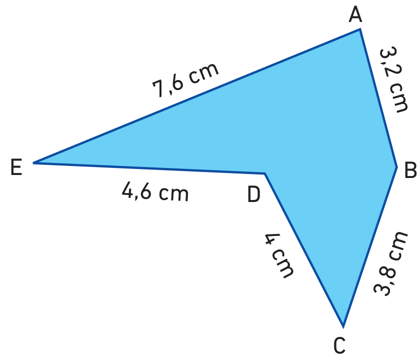
OBJECTIF 10

A Périmètre d'un polygone

DÉFINITION Le **périmètre d'une figure** est la longueur de son contour.

Exemple

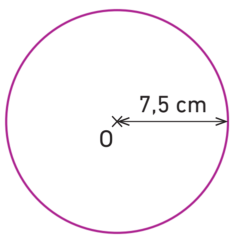
- Il suffit d'ajouter les longueurs des côtés d'un polygone, données dans la même unité, pour trouver son périmètre :
  $3{,}2 + 3{,}8 + 4 + 4{,}6 + 7{,}6 = 23{,}2$.
  Le périmètre du polygone ABCDE est égal à 23,2 cm.



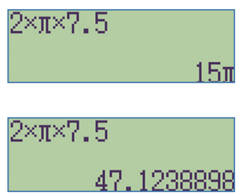
B Longueur d'un cercle

PROPRIÉTÉ La **longueur d'un cercle** est égale au double du produit du nombre pi (noté π) par le rayon de ce cercle.
En notant L la longueur du cercle et r son rayon, on a : $L = 2 \times \pi \times r$.

Exemple



- La longueur d'un cercle de rayon 7,5 cm est égale à :
  $2 \times \pi \times 7{,}5 = 15 \times \pi \approx 47$ cm.



Remarque
La longueur d'un cercle s'appelle aussi la **circonférence d'un cercle.**

C Unités de longueur

On peut exprimer un périmètre dans différentes unités de longueur et, en particulier, utiliser un tableau de conversion pour trouver l'unité la plus adaptée.
Par exemple, on peut convertir la longueur du cercle de l'exemple précédent.
La longueur d'un cercle de rayon 7,5 cm est environ égale à **0,47 m**.

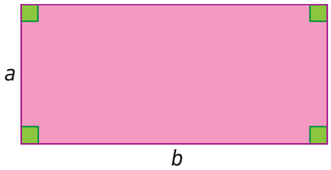
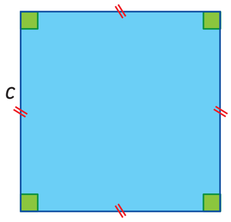
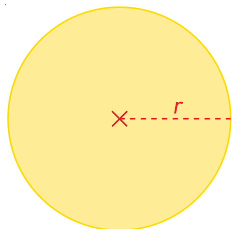
Unité	kilomètre	hectomètre	décamètre	mètre	décimètre	centimètre	millimètre
Notation	km	hm	dam	m	dm	cm	mm
				0	**4**	**7**	

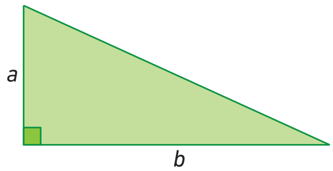
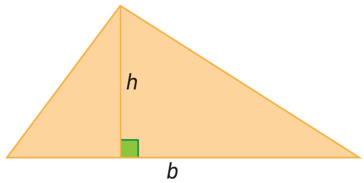
11 Aire d'une figure

OBJECTIF 11

A Aire de figures usuelles

Voici un rappel des formules donnant l'aire de quelques figures planes connues.

Rectangle	Carré	Disque
 Aire du rectangle : $a \times b$	 Aire du carré : $c \times c = c^2$	 Aire du disque : $\pi \times r \times r = \pi \times r^2$

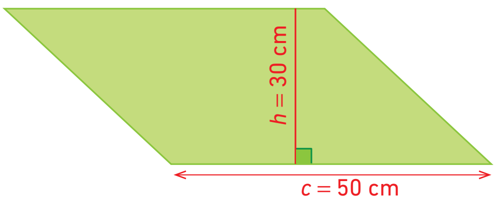
Triangle rectangle	Triangle quelconque
 Aire du triangle rectangle : $\dfrac{a \times b}{2}$	 Aire du triangle : $\dfrac{b \times h}{2}$

B Aire d'un parallélogramme

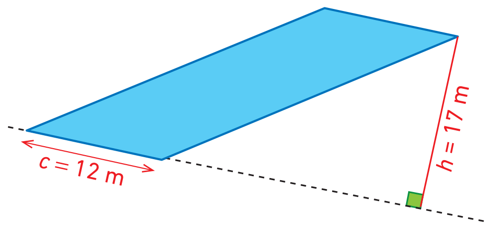
PROPRIÉTÉ L'**aire d'un parallélogramme** est égale au produit d'un de ses côtés par la hauteur relative à ce côté, tous deux exprimés dans la même unité.

$\mathscr{A} = c \times h$ où
- $\mathscr{A}$ est l'aire du parallélogramme ;
- c est la longueur d'un des côtés du parallélogramme ;
- h est la hauteur relative à ce côté.

Exemples



- L'aire de ce parallélogramme est égale à : $50 \times 30 = 1\ 500$ cm^2.



- L'aire de ce parallélogramme est égale à : $12 \times 17 = 204$ m^2.

C Unités d'aire

On peut exprimer une aire dans différentes unités et, en particulier, utiliser un tableau de conversion pour trouver l'unité la plus adaptée.
En utilisant un tableau de conversion d'unités d'aire, on peut ainsi écrire que le premier parallélogramme ci-dessus a une aire de 0,15 m^2 et que le second a une aire de 2,04 dam^2.

km^2		hm^2		dam^2		m^2		dm^2		cm^2		mm^2	
							0	1	5	0	0		
					2	0	4						

12 Transformer un point ou une figure par translation

OBJECTIF 12

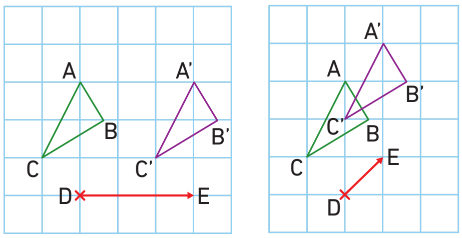
A Définition

Transformer un point ou une figure par **translation**, c'est faire glisser ce point ou cette figure selon une direction, un sens et une longueur donnés.

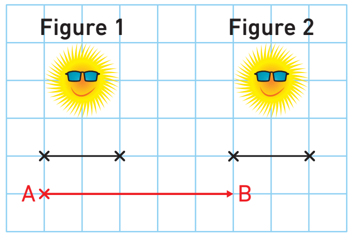
Remarque
Un tel glissement n'entraine ni déformation de la forme, ni changement d'orientation.

Exemples

- Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par la translation qui transforme le point D en E.



- La Figure 2 est l'image de la Figure 1 par la translation qui transforme A en B.

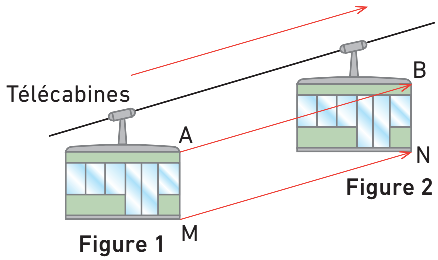


B Notation

La translation est symbolisée par une **flèche** qui donne la direction, le sens et la longueur de ce déplacement.

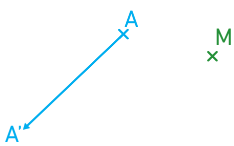
Exemple

- La Figure 2 est l'image de la Figure 1 par la translation qui transforme A en B, mais aussi M en N.



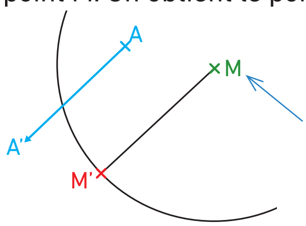
C Construction

Pour construire M', l'image du point M par la translation qui transforme A en A' :



❶ on trace la droite parallèle à (AA') passant par M ;

❷ avec un compas, on reporte la distance AA' dans le sens de A vers A' à partir du point M. On obtient le point M'.

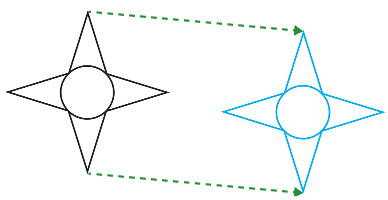


D Propriétés

Une translation conserve l'alignement, les longueurs, les angles et les aires.

Exemple

- La figure bleue est l'image de la figure noire par translation. Les deux figures sont **superposables**.



13 Transformer un point ou une figure par rotation

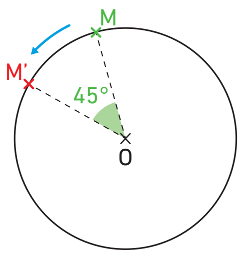
OBJECTIF 13

A Définition

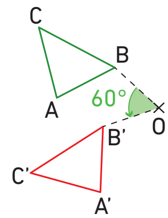
Transformer un point ou une figure par **rotation**, c'est faire tourner ce point ou cette figure par rapport à un centre de rotation et un angle.

Exemples

- Le point M' est l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle 45° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



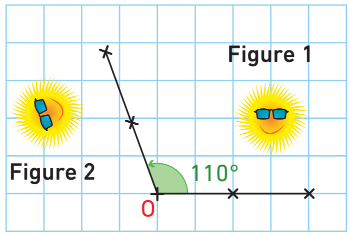
- Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par la rotation de centre O et d'angle 60° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



B Notation

Exemple

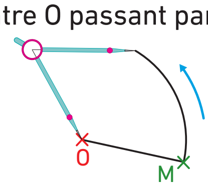
- La Figure 2 est l'image de la Figure 1 par la rotation de centre O et d'angle 110° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.



C Construction

Pour construire M', l'image du point M par une rotation de centre O et d'angle α, dans le sens de la flèche :

❶ avec un compas, on trace un arc de cercle de centre O passant par M ;

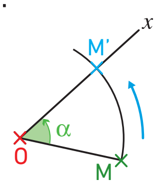


❷ avec un rapporteur et une règle non graduée, on trace une demi-droite [Ox) telle que $\widehat{MOx} = \alpha$ dans le sens de la flèche ;

❸ on appelle M', l'intersection de l'arc de cercle $\overset{\frown}{MM'}$ et de la demi-droite [Ox).

Le point M' est l'image du point M par la rotation de centre O et d'angle α avec les deux conditions réunies :

$\widehat{MOM'} = \alpha$ et OM = OM'.

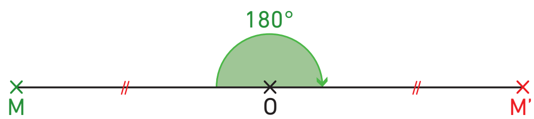


D Propriétés

– L'image de O par une rotation de centre O est le point O : on dit que O est **invariant**.
– La rotation de centre O et d'angle 180° est la **symétrie** de centre O.

Exemple

- Le point M' est l'image du point M :
  – par la rotation de centre O et d'angle 180° ;
  – par la symétrie centrale de centre O.

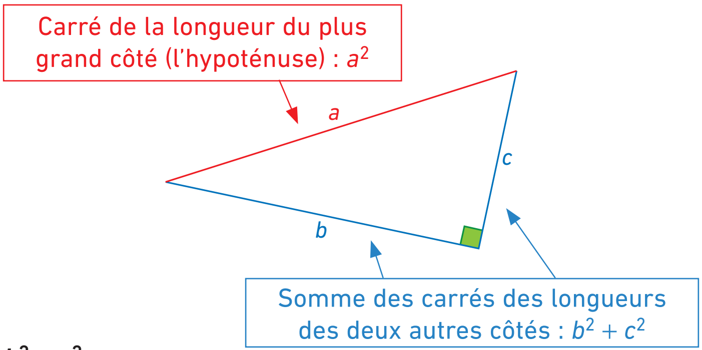


cours

14 L'égalité de Pythagore

OBJECTIF 14

PROPRIÉTÉ Un **triangle rectangle** est un triangle dont le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.



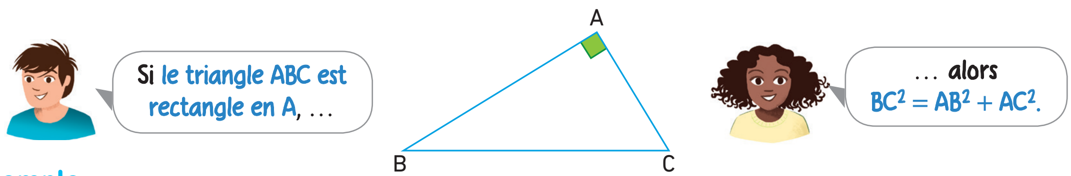
Vocabulaire
Dans un triangle rectangle, l'**hypoténuse** est le côté opposé à l'angle droit. C'est le plus grand côté du triangle.

Ici, $a^2 = b^2 + c^2$.

15 Calculer une longueur d'un côté d'un triangle rectangle

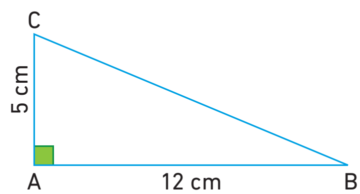
OBJECTIF 15

PROPRIÉTÉ **Théorème de Pythagore**
Si un triangle est rectangle, **alors** le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.



Exemple

- Le triangle ABC est un triangle rectangle en A tel que AB = 12 cm et AC = 5 cm.
  On va calculer la longueur du troisième côté [BC].
  On peut écrire l'égalité de Pythagore pour ce triangle :
  $BC^2 = AB^2 + AC^2$
  $BC^2 = 12^2 + 5^2$
  $BC^2 = 144 + 25$
  $BC^2 = 169$
  Pour connaitre BC, il faut donc chercher un nombre positif dont le carré est égal à 169.
  Ce nombre est 13. En effet $13^2 = 169$.
  Le troisième côté [BC] mesure donc 13 cm.



DÉFINITION Soit a un nombre **positif**. On appelle « **racine carrée de a** » le nombre **positif** dont le carré est égal à a. On le note $\sqrt{a}$.

Exemples

- Dans l'exemple précédent, $BC^2 = 169$ donc $BC = \sqrt{169}$ qui est égal à 13.
- **Carrés parfaits entre 1 et 144**

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{25} = 5$	$\sqrt{36} = 6$
$\sqrt{49} = 7$	$\sqrt{64} = 8$	$\sqrt{81} = 9$	$\sqrt{100} = 10$	$\sqrt{121} = 11$	$\sqrt{144} = 12$

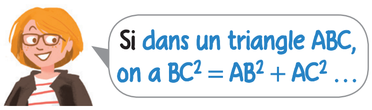
16 Démontrer qu'un triangle est rectangle ou non

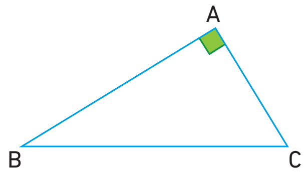
OBJECTIF 16

A Prouver qu'un triangle est rectangle

PROPRIÉTÉ Réciproque du théorème de Pythagore

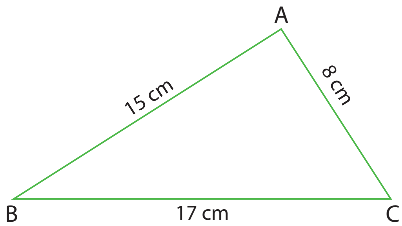
Si le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, **alors** ce triangle est rectangle.





Exemple

- Soit le triangle ABC tel que BC = 17 cm, AB = 15 cm et AC = 8 cm.



On veut vérifier si ce triangle est rectangle.

D'une part :

$BC^2 = 17^2$
$= 289$

D'autre part :

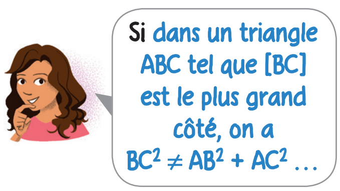
$AB^2 + AC^2 = 15^2 + 8^2$
$= 225 + 64$
$= 289$

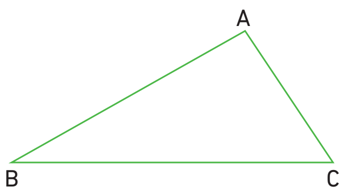
Donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle ABC est rectangle en A.

B Prouver qu'un triangle n'est pas rectangle

PROPRIÉTÉ **Si** le carré de la longueur du plus grand côté d'un triangle n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, **alors** ce triangle n'est pas rectangle.





Exemple

- Soit le triangle ABC tel que BC = 6 cm, AB = 5 cm et AC = 3 cm.

On veut vérifier si ce triangle est rectangle.

D'une part :

$BC^2 = 6^2$
$= 36$

D'autre part :

$AB^2 + AC^2 = 5^2 + 3^2$
$= 25 + 9$
$= 34$

Donc $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$.

L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, donc le triangle ABC n'est pas rectangle.

cours

17 Angles et parallélisme

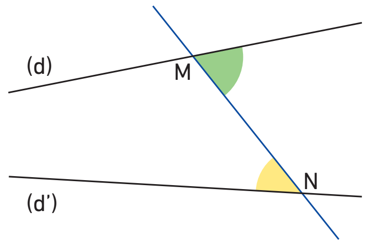
OBJECTIF 17

A Angles alternes-internes

DÉFINITION Soit deux droites (d) et (d') coupées par une sécante.
Dire que deux angles formés par ces trois droites sont **alternes-internes** signifie :
– qu'ils n'ont pas le même sommet ;
– qu'ils sont de part et d'autre de la sécante ;
– qu'ils sont à l'intérieur de la bande délimitée par les droites (d) et (d').

Exemple

- Les angles vert et jaune formés par les droites (d) et (d') coupées par la sécante (MN) sont **alternes-internes**.

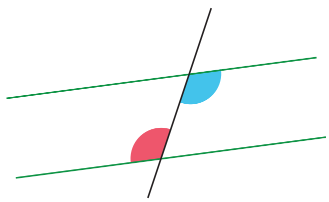


B Angles alternes-internes et droites parallèles

PROPRIÉTÉ **Si** deux angles alternes-internes sont formés par deux droites parallèles coupées par une sécante, **alors** ces deux angles sont égaux.

Exemple

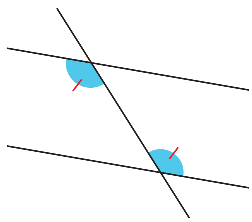
- Les deux droites vertes sont parallèles donc les deux angles alternes-internes (bleu et rouge) sont égaux.



PROPRIÉTÉ **Si** deux droites coupées par une sécante forment deux angles alternes-internes égaux, **alors** ces droites sont parallèles.

Exemple

- Les deux angles alternes-internes sont égaux donc les deux droites coupées par la sécante sont parallèles.



18 Triangles semblables

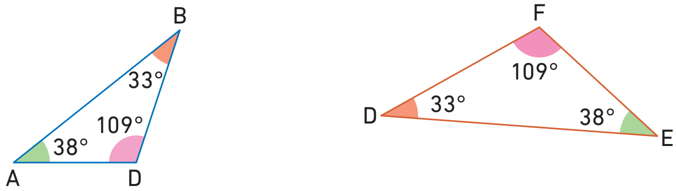
OBJECTIF 18

A Triangles semblables

DÉFINITION Dire que deux triangles sont **semblables** signifie que leurs angles sont égaux deux à deux.
On dit aussi que ces triangles sont **de même forme**.

Exemple

- Les triangles ABC et DEF sont semblables : $\hat{A} = \hat{E}$, $\hat{C} = \hat{D}$ et $\hat{B} = \hat{F}$.



PROPRIÉTÉ **Si** deux angles d'un triangle sont égaux à deux angles d'un autre triangle, **alors** ces deux triangles sont semblables.

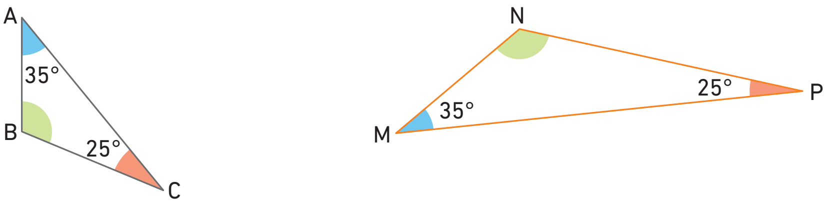
Le fait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° permet de **prouver** cette propriété.

Exemple

- $\widehat{ABC} = 180 - (\widehat{BAC} + \widehat{ACB}) = 180 - (35 + 25) = 120°$;

  $\widehat{MNP} = 180 - (\widehat{NMP} + \widehat{NPM}) = 180 - (35 + 25) = 120°$.

  On en déduit que $\widehat{BAC} = \widehat{NMP}$; $\widehat{ACB} = \widehat{NPM}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{MNP}$, donc que les triangles ABC et MNP sont semblables.



B Caractérisation des triangles semblables

PROPRIÉTÉ **Si** deux triangles sont de même forme, **alors** les côtés opposés aux angles égaux ont leurs longueurs proportionnelles.

Exemple

- Dans l'exemple ci-dessus, ABC et MNP sont deux triangles semblables avec :
  – [AB] et [MN], [BC] et [NP], [AC] et [MP] les côtés homologues ;
  – $\frac{MN}{AB} = \frac{MP}{AC} = \frac{NP}{BC} = k$.

Vocabulaire
Dans deux triangles semblables, les côtés opposés à des angles égaux sont appelés **« côtés homologues »**.

Vocabulaire
Le rapport k est appelé **coefficient d'agrandissement** ou de **réduction**.

La réciproque de cette propriété est aussi vraie.

PROPRIÉTÉ **Si** deux triangles ont les longueurs de leurs côtés proportionnelles, **alors** ils sont de même forme.

19 Transformer un point ou une figure par symétries, translation, rotation

OBJECTIF 19

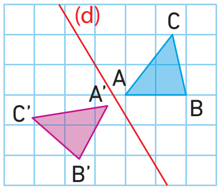
A Symétrie axiale

DÉFINITION Transformer une figure par **symétrie axiale**, c'est créer l'image de cette figure par rapport à un axe.

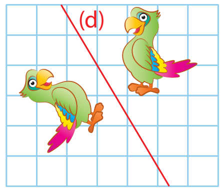
Action
Les deux figures symétriques doivent se superposer parfaitement après le pliage le long de l'axe de symétrie.

Exemples

- Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par la symétrie d'axe (d).



- Les deux oiseaux sont symétriques par rapport à la droite (d).



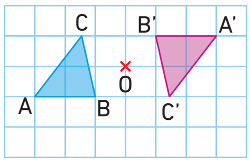
B Symétrie centrale

DÉFINITION Transformer une figure par **symétrie centrale**, c'est créer l'image de cette figure par rapport à un centre de symétrie.

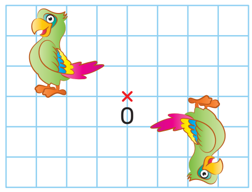
Action
Une symétrie centrale fait tourner une figure de 180° autour du centre de symétrie.

Exemples

- Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par la symétrie centrale de centre O.



- Les deux oiseaux sont symétriques par rapport au point O.



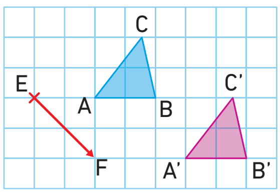
C Translation

DÉFINITION Transformer une figure par **translation**, c'est créer l'image de cette figure par rapport à deux points donnés.

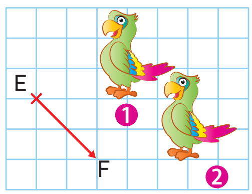
Action
Une translation fait glisser une forme dans une direction, un sens et une longueur donnés.

Exemples

- Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par la translation qui transforme E en F.



- La figure ❷ est l'image de la figure ❶ par la translation qui transforme E en F.



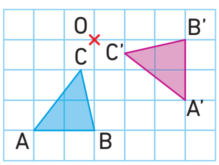
D Rotation

DÉFINITION Transformer une figure par **rotation**, c'est créer l'image de cette figure par rapport à :
– un centre de rotation ;
– un angle ;
– un sens de rotation.

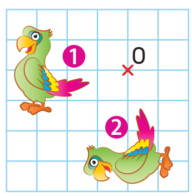
Action
Une rotation fait tourner une forme autour d'un point.

Exemples

- Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par la rotation de centre O et d'angle 90° (dans le sens anti-horaire ⟲).



- La figure ❷ est l'image de la figure ❶ par la rotation de centre O et d'angle 90° (sens anti-horaire ⟲).



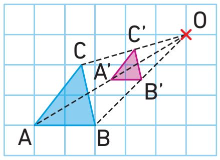
20 Transformer un point ou une figure par homothétie

OBJECTIF 20

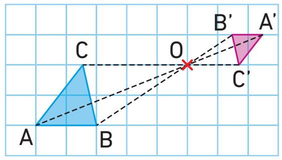
DÉFINITION Transformer une figure par **homothétie**, c'est créer l'image de cette figure par rapport à :
– un centre O (un point) ;
– un rapport *k* (un nombre).

Exemples

- Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 0{,}5$.



- Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport $k = -0{,}5$.

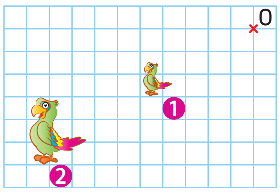


A Action

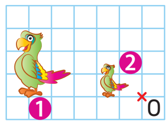
- Si $k > 1$ (ou $k < -1$), l'homothétie correspond à un agrandissement.
- Si $0 < k < 1$ (ou $-1 < k < 0$), l'homothétie correspond à une réduction.

Exemples

- La figure ❷ est un agrandissement de la figure ❶ par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 2$.



- La figure ❷ est une réduction de la figure ❶ par l'homothétie de centre O et de rapport $k = 0{,}25$.

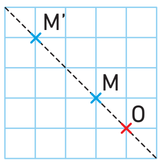


B Construction

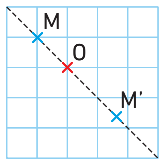
Pour construire l'image M' d'un point M par rapport à l'homothétie de centre O et de rapport *k*, il faut :
– tracer la droite (OM) : si $k > 0$, M' est du même côté que M par rapport à O, sinon, M' est du côté opposé à M par rapport à O ;
– reporter les longueurs :
$OM' = k \times OM$ si $k > 0$,
et $OM' = -k \times OM$ si $k < 0$.

Exemples

- **Avec $k = 3$**
M' est du même côté que M par rapport à O.
$OM' = 3 \times OM$



- **Avec $k = -1{,}5$**
M' est du côté opposé à M par rapport à O.
$OM' = 1{,}5 \times OM$

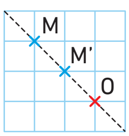


C Propriétés

PROPRIÉTÉ 1 Un point, son image par une homothétie et le centre de l'homothétie sont alignés.

Exemple

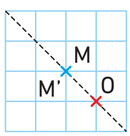
- Si M' est l'image de M par une homothétie de centre O, alors les points O, M et M' sont alignés.



PROPRIÉTÉ 2 Une homothétie de rapport 1 n'effectue aucune transformation.

Exemple

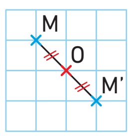
- Si M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport 1, alors M = M'.



PROPRIÉTÉ 3 Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale.

Exemple

- Si M' est l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport -1, alors M' est le symétrique de M par rapport à O.

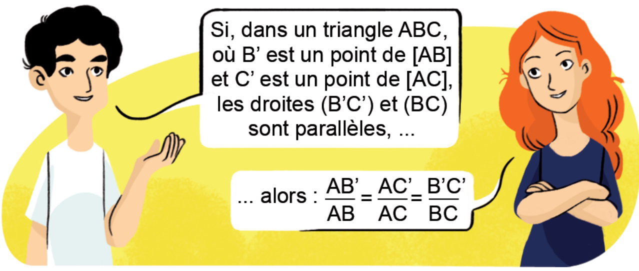


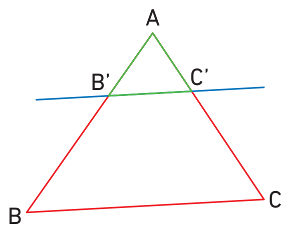
cours

21 Propriété de Thalès dans le triangle

OBJECTIF 21

PROPRIÉTÉ **Si**, dans un triangle, une droite coupe deux côtés parallèlement au troisième côté, **alors** les deux triangles ainsi formés ont des **côtés deux à deux proportionnels**.



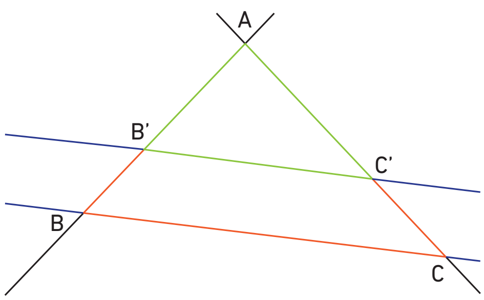


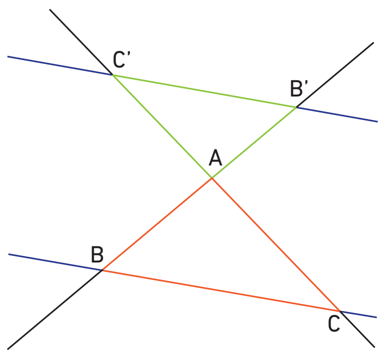
En effet, les triangles **AB'C'** et **ABC** ont des côtés deux à deux proportionnels, donc les rapports entre ces côtés sont égaux.
Les triangles **AB'C'** et **ABC** sont des **triangles semblables**.

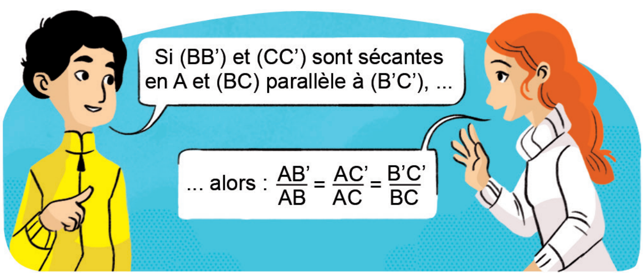
22 Calculer une longueur avec le théorème de Thalès

OBJECTIF 22

PROPRIÉTÉ **Si** deux droites parallèles coupent deux droites sécantes, **alors** elles déterminent **deux triangles** dont les côtés correspondants ont des **longueurs proportionnelles**.





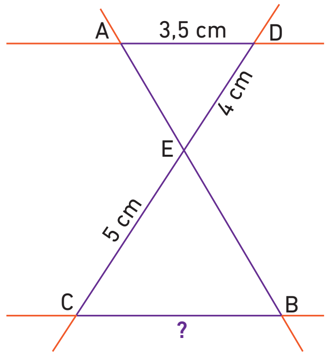


En effet, les triangles **AB'C'** et **ABC** ont des côtés respectivement proportionnels, donc les rapports (qui expriment les coefficients d'agrandissement ou de réduction) entre ces côtés sont égaux.
Les triangles **AB'C'** et **ABC** sont des **triangles semblables**.

Exemple

- Dans la figure ci-contre, les droites (BC) et (AD) sont parallèles.
  On peut alors calculer la longueur BC en appliquant le théorème de Thalès. On a alors : $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{ED}{EC} = \dfrac{AD}{BC}$.

  Soit $\dfrac{EA}{EB} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{3{,}5}{BC}$ et, en utilisant l'égalité des produits en croix, $BC = \dfrac{5 \times 3{,}5}{4} = 4{,}375$ cm.



23 Prouver que des droites sont ou ne sont pas parallèles

OBJECTIF 23

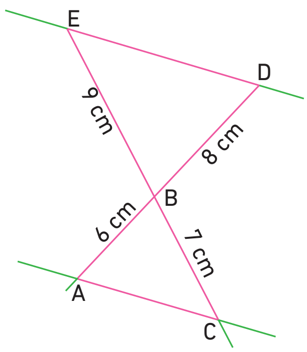
PROPRIÉTÉ **Si** deux droites (BM) et (CN) sont sécantes en A et **si** deux des rapports $\dfrac{AM}{AB}$, $\dfrac{AN}{AC}$ et $\dfrac{MN}{BC}$ ne sont pas égaux, **alors** les **droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles**.

Exemple

- $\dfrac{BA}{BD} = \dfrac{6}{8} = \dfrac{3}{4}$

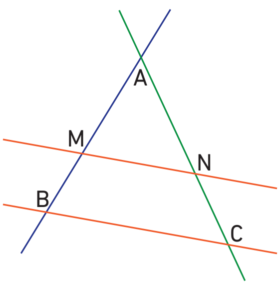
  $\dfrac{BC}{BE} = \dfrac{7}{9}$, donc $\dfrac{BA}{BD} \neq \dfrac{BC}{BE}$.

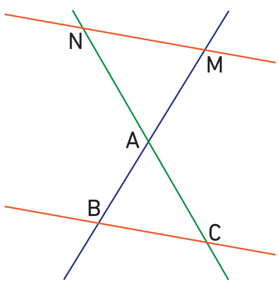
  D'après la propriété précédente, **les droites (AC) et (DE) ne sont pas parallèles.**



PROPRIÉTÉ **Réciproque du théorème de Thalès**

Si, d'une part, les points A, B et M et, d'autre part, les points A, C et N sont alignés dans le même ordre sur deux droites sécantes en A et **si** $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$, **alors** les **droites (MN) et (BC) sont parallèles**.





Remarque

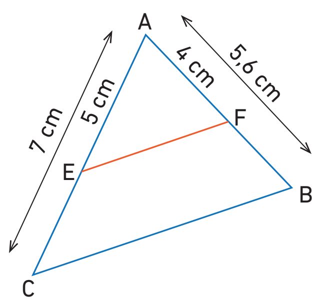
La réciproque du théorème de Thalès sert uniquement à prouver que des **droites sont parallèles**.

Exemple

- $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{5}{7}$

  $\dfrac{AF}{AB} = \dfrac{4}{5{,}6} = \dfrac{40}{56} = \dfrac{5}{7}$, donc $\dfrac{AE}{AC} = \dfrac{AF}{AB}$.

  De plus, A, E, C et A, F, B sont alignés dans le même ordre.
  D'après la réciproque du théorème de Thalès, **les droites (EF) et (BC) sont parallèles.**



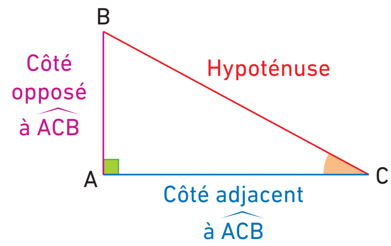
24 Cosinus, sinus et tangente

OBJECTIF 24

DÉFINITIONS Dans un triangle rectangle, pour un angle aigu donné, on définit trois rapports de longueurs.

- Le **sinus** de cet angle est égal au quotient : $\dfrac{\text{Côté opposé à cet angle aigu}}{\text{Hypoténuse}}$.
- Le **cosinus** de cet angle est égal au quotient : $\dfrac{\text{Côté adjacent à cet angle aigu}}{\text{Hypoténuse}}$.
- La **tangente** de cet angle est égale au quotient : $\dfrac{\text{Côté opposé à cet angle aigu}}{\text{Côté adjacent à cet angle aigu}}$.

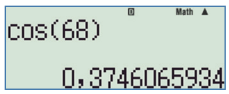
Exemple



- Dans un triangle ABC rectangle en A, on a donc :
  $\sin\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{BC}$ $\cos\widehat{ACB} = \dfrac{AC}{BC}$ $\tan\widehat{ACB} = \dfrac{AB}{AC}$
- Les calculatrices donnent de très bonnes valeurs approchées de ces rapports. Il faut simplement vérifier qu'elles sont bien configurées en « **Degrés** ».

  Calculatrice 12

  Par exemple, pour le cosinus de 68° :



PROPRIÉTÉ Dans un triangle rectangle, le cosinus et le sinus d'un angle aigu sont **toujours compris entre 0 et 1.**

- En effet, dans un triangle rectangle, l'hypoténuse est le plus grand côté donc le rapport entre l'un des deux autres côtés et l'hypoténuse est toujours compris entre 0 et 1.

PROPRIÉTÉ Dans un triangle rectangle, pour tout angle aigu de mesure x :

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \qquad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

- En effet, en écrivant le sinus et le cosinus d'un angle aigu à l'aide des côtés, on arrive à prouver la seconde égalité.
  En utilisant en plus l'égalité de Pythagore dans ce même triangle, on arrive à prouver que $(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$.

25 Calculer un côté d'un triangle rectangle

OBJECTIF 25

Pour calculer un côté d'un triangle rectangle dont on connait un angle aigu et la longueur d'un côté, il faut :

– faire un schéma du triangle en précisant quels côtés sont l'hypoténuse, le côté opposé à l'angle connu et le côté adjacent à l'angle connu ;

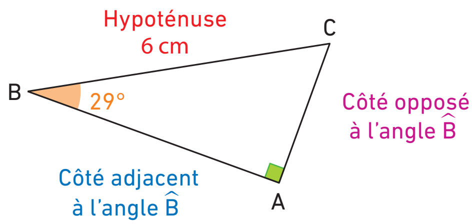
– se demander ensuite quel est le côté cherché et quel est le côté connu ;

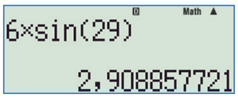
– écrire une égalité avec le rapport qui fait intervenir ces deux côtés ;

– on a ainsi une équation à une seule inconnue (le côté cherché) qu'il suffit de résoudre.

Exemple

- Calculer AC dans le triangle ABC rectangle en A.
  C'est le **sinus** qui fait intervenir à la fois l'**hypoténuse** et le **côté opposé** à l'angle $\widehat{B}$.
  On peut donc écrire :
  $\sin \widehat{B} = \dfrac{AC}{BC}$ d'où $\sin 29° = \dfrac{AC}{6}$.
  Donc $AC = 6 \times \sin 29°$
  La calculatrice connait une valeur approchée de $\sin 29°$. Calculatrice 12





Donc $AC \approx 2{,}9$ cm.

26 Déterminer la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle

OBJECTIF 26

Pour déterminer la mesure d'un angle aigu d'un triangle rectangle dont on connait les longueurs de deux côtés, il faut :

– faire un schéma du triangle en précisant quels côtés sont l'hypoténuse, le côté opposé à l'angle cherché et le côté adjacent à l'angle cherché ;

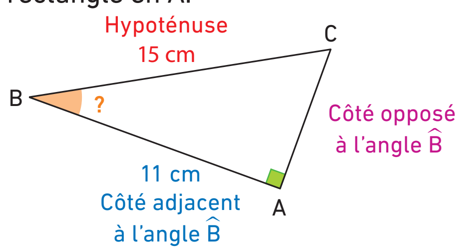
– se demander ensuite quels sont les deux côté connus ;

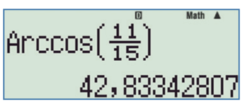
– écrire une égalité avec le rapport qui fait intervenir ces deux côtés ;

– on a ainsi une équation à une seule inconnue (l'angle cherché) dont on pourra trouver une valeur approchée grâce à la calculatrice.

Exemple

- Calculer la mesure de l'angle $\widehat{B}$ dans le triangle ABC rectangle en A.
  C'est le **cosinus** qui fait intervenir à la fois l'**hypoténuse** et le **côté adjacent** à l'angle.
  On peut donc écrire :
  $\cos \widehat{B} = \dfrac{AB}{BC}$ d'où $\cos \widehat{B} = \dfrac{11}{15}$.
  La calculatrice sait alors retrouver une valeur approchée de $\widehat{B}$. Calculatrice 13





Donc $\widehat{B} \approx 43°$.