Démonstration des propriétés de l'équation $x^2 = a$

- 1er cas : Si $a > 0$

On a : $x^2 = a$

On obtient une équation qui a les mêmes solutions en soustrayant a aux deux membres :

$x^2 - a = a - a$

Et comme $a > 0$, $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$

Et on a : $x^2 - \left(\sqrt{a}\right)^2 = 0$

Et en factorisant à l'aide de l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$, on obtient :

$\left(x + \sqrt{a}\right)\left(x - \sqrt{a}\right) = 0$

Comme un produit est nul quand l'un de ses facteurs est nul, on trouve deux solutions :

- solution 1 : $x + \sqrt{a} = 0$ et donc $x = -\sqrt{a}$;

- solution 2 : $x - \sqrt{a} = 0$ et donc $x = \sqrt{a}$.

- 2e cas : Si $a = 0$

Le raisonnement précédent reste valable mais comme $\sqrt{0} = -\sqrt{0} = 0$, il n'y a qu'une seule solution qui est 0.

Remarque : On dit aussi que 0 est une solution double.

- 3e cas : Si $a < 0$

L'équation $x^2 = a$ n'a pas de solution puisque qu'un carré est toujours positif. En effet, si $x \geq 0$, alors $x^2 = x \times x \geq 0$ et de même, si $x \leq 0$, alors $x^2 = x \times x \geq 0$.