cours

1 Reconnaitre un tableau de proportionnalité

OBJECTIF 1

DÉFINITION Il y a **proportionnalité** dans un tableau de nombres à deux lignes lorsque les nombres de la deuxième ligne s'obtiennent en multipliant ceux de la première **par un même nombre** que l'on appelle **coefficient de proportionnalité**.

Exemple

- Le prix de cerises vendues 2,70 € le kilogramme est proportionnel à leur masse.
  Le tableau donne le prix à payer selon la masse de cerises achetées.

Masse de cerises (en kg)	0,5	1	2	5
Prix (en €)	1,35	2,70	5,40	13,50

$\times 2{,}70$

Les quotients $\dfrac{1{,}35}{0{,}5}$; $\dfrac{2{,}70}{1}$; $\dfrac{5{,}40}{2}$; $\dfrac{13{,}50}{5}$ sont tous égaux à 2,70.

2 Compléter un tableau de proportionnalité

OBJECTIF 2

DÉFINITION Dans un tableau de proportionnalité à quatre cases, si l'on connait trois valeurs, alors on peut calculer la valeur manquante, appelée **la quatrième proportionnelle**.

a	*b*
c	?

Exemple

- Un robinet fuit et la quantité d'eau perdue est proportionnelle au temps qui passe.
  On peut compléter ce tableau par différentes méthodes.

Temps (en h)	4	6	10
Quantité d'eau (en L)	10		

1. Par passage à l'unité

En 4 heures, on perd 10 L.
Donc en 1 heure, on perd 4 fois moins :
$10 : 4 = 2{,}5$ L.
En 6 heures, on perd 6 fois plus que 2,5 L :
$6 \times 2{,}5 =$ **15 L.**

2. En utilisant le coefficient de proportionnalité

4	6
10	**15**

$\times 2{,}5$ $\times 2{,}5$

$6 \times 2{,}5 = 15$

3. En utilisant les propriétés de la proportionnalité

4	6
10	**15**

$\times 1{,}5$ $\times 1{,}5$

$10 \times 1{,}5 = 15$

4	6	10
10	15	**25**

+ =

$10 + 15 = 25$

3 Utiliser la proportionnalité

OBJECTIF 3

A Calculer des grandeurs

Dans une situation de proportionnalité, on peut utiliser un tableau pour organiser et calculer des grandeurs.

Exemple

- Léa marche toujours à la même vitesse. Elle parcourt 3 km en 15 min.
  On peut calculer combien de temps il lui faudrait pour parcourir 10 km.
  $15 : 3 = 5$ donc Léa parcourt 1 km en 5 min.
  $10 \times 5 = 50$ donc il faut 50 minutes à Léa pour parcourir 10 km.

Distance (en km)	3	10
Temps (en min)	15	

$\times\ ?$

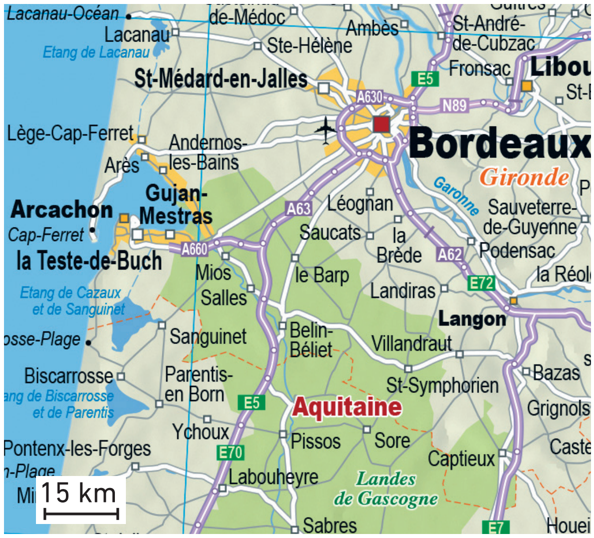
B Utiliser une échelle

DÉFINITION Sur un plan dit « à l'échelle », les longueurs sont proportionnelles aux longueurs réelles.
Le coefficient de proportionnalité obtenu en divisant les longueurs sur la carte par les longueurs réelles, toutes exprimées dans la même unité, s'appelle **l'échelle du plan**.

Exemple

- La carte ci-contre est à l'échelle 1/1 500 000, ce qui signifie que les dimensions sont 1 500 000 fois plus grandes dans la réalité que sur le plan. Autrement dit, 1 cm sur le plan représente 1 500 000 cm (soit 15 km) dans la réalité. Sur cette carte, si la distance entre deux villes est de 8,4 cm, dans la réalité, cette distance est de $8{,}4 \times 15 = 126$ km.

On peut aussi écrire l'échelle : $\frac{1}{1\,500\,000}$.



Carte : Bordeaux © Geoatlas

4 Utiliser et déterminer des pourcentages

OBJECTIF 4

DÉFINITION Un pourcentage de t % traduit une situation de proportionnalité de coefficient $\frac{t}{100}$. Donc appliquer un taux de t % revient à multiplier par $\frac{t}{100}$.

Exemple

- Dans une classe de 30 élèves, 60 % des élèves pratiquent un sport.
  Le nombre de sportifs dans cette classe se calcule de la façon suivante :
  $30 \times \frac{60}{100} = 30 \times 0{,}6 = 18$. Il y a donc 18 sportifs dans la classe.

DÉFINITION Déterminer un **pourcentage**, c'est déterminer une proportion écrite sous forme d'une écriture fractionnaire de dénominateur 100.

Exemple

- Parmi les 500 élèves d'un collège, 120 étudient l'allemand. Le pourcentage d'élèves du collège qui apprennent l'allemand s'obtient en écrivant la proportion suivante :
  $\frac{120}{500} = \frac{24}{100} = 24$ %. Ainsi, 24 % des élèves de ce collège étudient l'allemand.
  Pour calculer ce pourcentage, on peut aussi utiliser un tableau de proportionnalité.

Nombre d'élèves étudiant l'allemand	120	x
Nombre total d'élèves	500	100

cours

5 Déterminer une quatrième proportionnelle

OBJECTIF 5

A Rappel sur les tableaux de proportionnalité

DÉFINITION Un **tableau de proportionnalité** est un tableau dans lequel on obtient les nombres d'une ligne en multipliant ceux de l'autre ligne par un même nombre appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple

Durée d'utilisation (en heure)	0,5	2	5	24
Énergie consommée (en Wattheure)	30	120	300	1 440

$\times 60$

Le coefficient de proportionnalité est 60. Ce nombre donne l'énergie consommée en 1 heure.

B Quatrième proportionnelle et produit en croix

PROPRIÉTÉ **Si** le tableau ci-contre est un tableau de proportionnalité, **alors** on a l'égalité des **produits en croix : $a \times d = b \times c$**.

a	c
b	d

L'égalité des produits en croix permet de calculer une **quatrième proportionnelle** sans utiliser le coefficient de proportionnalité lorsqu'on connait les trois autres valeurs.

Exemple

- Dans le tableau de proportionnalité ci-contre, on a :

$250 \times x = 150 \times 400$.

Donc $x = \dfrac{150 \times 400}{250}$, d'où $x = 240$.

250	400
150	x

Quatrième proportionnelle

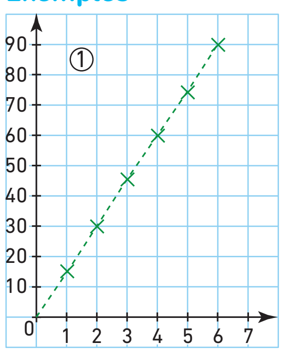
6 Caractériser graphiquement la proportionnalité

OBJECTIF 6

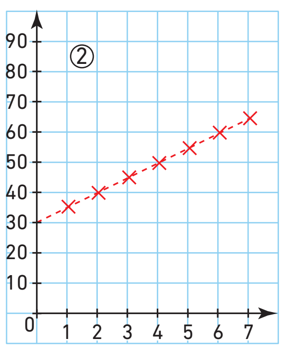
PROPRIÉTÉS – Une **situation de proportionnalité** est représentée graphiquement dans un repère par des points alignés avec l'origine du repère.

– Réciproquement, **si** une situation est représentée graphiquement dans un repère par des points alignés avec l'origine du repère, **alors** c'est une situation de proportionnalité.

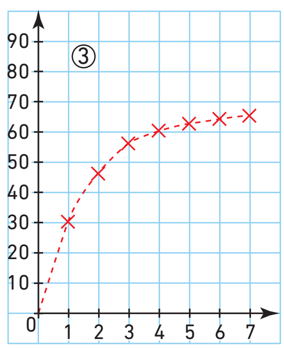
Exemples



Le graphique ① représente une situation de proportionnalité car les points sont alignés avec l'origine du repère.



Le graphique ② ne représente pas une situation de proportionnalité car les points ne sont pas alignés avec l'origine du repère.



Le graphique ③ ne représente pas une situation de proportionnalité car les points ne sont pas alignés.

7 Utiliser la proportionnalité pour calculer des grandeurs

OBJECTIF 7

A Calculer avec des vitesses

DÉFINITION La **vitesse moyenne** d'un objet mobile sur un trajet est la vitesse que cet objet aurait en parcourant la même distance pendant la même durée à vitesse constante.

Exemple

- Un train roule 3 h 30 min à la vitesse moyenne de 150 km/h.
3 h 30 min = 210 min et 150 km/h correspond à un trajet de 150 km en 60 minutes.
$\dfrac{210 \times 150}{60} = 525$. Le train a parcouru **525 km**.

Distance (en km)	150	?
Durée (en min)	60	210

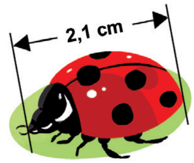
B Calculer avec des échelles

DÉFINITION Sur un plan dit « à l'échelle », les longueurs sont proportionnelles aux longueurs réelles. Le coefficient obtenu en divisant les longueurs de la carte par les longueurs réelles, toutes exprimées dans la même unité, s'appelle **échelle du plan**.

Exemple

- Le dessin ci-contre est à l'échelle 3. Cela signifie que les dimensions de la coccinelle sont 3 fois plus petites dans la réalité que sur le dessin où elle mesure 2,1 cm.

Longueur réelle (en cm)	1	?
Longueur sur le dessin (en cm)	3	2,1



$2{,}1 : 3 = 0{,}7$ cm $= 7$ mm. Dans la réalité, la coccinelle mesure 7 mm.

8 Manipuler des pourcentages pour résoudre des problèmes

OBJECTIF 8

A Appliquer un pourcentage

PROPRIÉTÉ Un pourcentage de t % traduit une situation de proportionnalité de coefficient $\dfrac{t}{100}$. Donc appliquer un taux de t % revient à multiplier par $\dfrac{t}{100}$.

Exemple

- Dans une classe de 30 élèves, 60 % des élèves pratiquent un sport.
On calcule $30 \times \dfrac{60}{100} = 18$. Il y a donc 18 élèves sportifs dans la classe.

B Déterminer un pourcentage

DÉFINITION Déterminer un pourcentage, c'est déterminer une proportion écrite sous forme d'une écriture fractionnaire de dénominateur 100.

Exemple

- Sur 550 élèves, 231 sont externes.
D'après l'égalité des produits en croix, on a $550 \times x = 231 \times 100$.
Donc $x = \dfrac{231 \times 100}{550} = 42$. Il y a donc 42 % d'externes dans ce collège.

Nombre d'externes	231	x
Nombre total d'élèves	550	100

9 Situations de proportionnalité

OBJECTIF 9

A Tableau et coefficient de proportionnalité

Un **tableau de proportionnalité** est un tableau dans lequel on obtient les nombres d'une ligne en multipliant ceux de l'autre ligne par un même nombre appelé **coefficient de proportionnalité**.

Exemple

Durée du film (en s)	10	20	30	120
Nombre d'images	240	480	720	2 880

$\times 24$

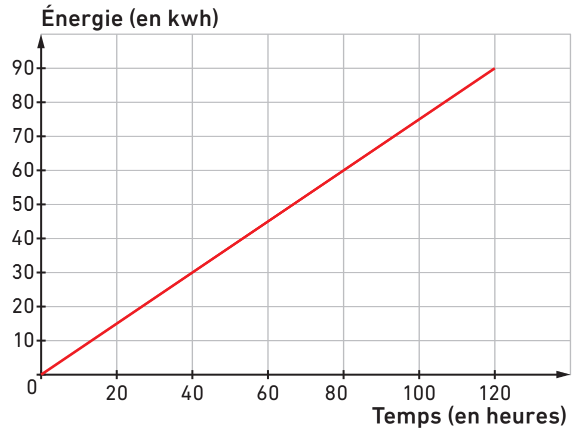
Le coefficient de proportionnalité est 24. C'est le nombre d'images par seconde d'un film.

B Représentation graphique

PROPRIÉTÉ • Une **situation de proportionnalité** est représentée graphiquement dans un repère par des points alignés avec l'origine du repère.

• **Réciproquement**, si une situation est représentée graphiquement dans un repère par des points alignés avec l'origine du repère, alors c'est une situation de proportionnalité.

Exemple



C Calcul en situation de proportionnalité

Sur le plan d'une course d'orientation, 5 cm représentent 150 m dans la réalité.
Il existe plusieurs méthodes pour déterminer la distance réelle représentée par 12 cm.

Distance sur la carte (en cm)	5	12
Distance réelle (en m)	150	d

1. Passage par l'unité

5 cm représentent 150 m, donc 1 cm représente 5 fois moins, c'est-à-dire 30 m.
12 cm représentent donc $30 \times 12 = 360$ m.

2. Utilisation du coefficient de proportionnalité

Le coefficient de proportionnalité de ce tableau est $\frac{150}{5}$, donc la distance est de $12 \times \frac{150}{5} = 360$ m.

3. Multiplication d'une donnée

$12 = 5 \times \frac{12}{5}$, donc la distance est de $150 \times \frac{12}{5} = 360$ m.

4. Utilisation de l'égalité des produits en croix

$5 \times d = 150 \times 12$, donc $d = 150 \times \frac{12}{5} = 360$ m.

10 Pourcentages

OBJECTIF 10

A Appliquer un pourcentage

Un pourcentage de t % traduit une situation de proportionnalité de coefficient $\frac{t}{100}$.

Exemple

- 60 % des 30 élèves d'une classe de 3ᵉ pratiquent un sport. Le nombre de sportifs dans cette classe est : $30 \times \frac{60}{100}$, soit 18 élèves.

Nombre de sportifs	x	60
Nombre total d'élèves	30	100

B Augmenter ou diminuer d'un pourcentage

PROPRIÉTÉ
- Augmenter un nombre de t % revient à le multiplier par $1 + \frac{t}{100}$.
- Diminuer un nombre de t % revient à le multiplier par $1 - \frac{t}{100}$.

Exemples

1. Augmentation

Les tarifs d'une compagnie d'énergie augmentent de 9 %.

a. La famille Martin payait une facture annuelle de 570,00 €.

Le nouveau tarif est donc égal à $570{,}00 \times \left(1 + \frac{9}{100}\right) = 570{,}00 \times \mathbf{1{,}09} = 621{,}30$ €.

b. Un abonnement actuel est facturé 59,95 €.

Son ancien tarif était de $59{,}95 : \left(1 + \frac{9}{100}\right) = 59{,}95 : \mathbf{1{,}09} = 55{,}00$ €.

2. Réduction

Dans un magasin, lors des soldes, on diminue tous les prix de 35 %.

a. Le prix d'un pantalon était de 55,00 €.

Son nouveau prix est donc de $55{,}00 \times \left(1 - \frac{35}{100}\right) = 55{,}00 \times \mathbf{0{,}65} = 35{,}75$ €.

b. Un blouson coute maintenant 44,20 €.

Son prix initial était égal à $44{,}20 : \left(1 - \frac{35}{100}\right) = 44{,}20 : \mathbf{0{,}65} = 68{,}00$ €.

11 Grandeurs composées

OBJECTIF 11

DÉFINITION Une **grandeur quotient** est une grandeur obtenue en effectuant le quotient de deux grandeurs.

Exemple

- La vitesse moyenne d'un mobile est la distance parcourue pendant une unité de temps. Elle s'exprime en km/h par le quotient de deux grandeurs : la longueur du parcours (en km) et la durée de ce parcours (en h). Un véhicule roulant à une vitesse constante égale à 120 km/h parcourt ainsi 120 km en une heure.

DÉFINITION Une **grandeur produit** est une grandeur obtenue en effectuant le produit de deux grandeurs.

Exemple

- L'énergie (en Wh) s'exprime par le produit de deux grandeurs : la puissance de l'appareil (en W) et la durée d'utilisation de cet appareil (en h). Un appareil de puissance 100 W utilisé pendant 3 h consomme ainsi une énergie égale à 300 Wh.